GS Đặng Đình Áng một người làm toán ứng dụng

Ngày 5 tháng 7 năm 2020

1 Mở đầu

+ Dưới đây là danh sách chọn lọc các bài báo khoa học của GS Đặng Đình Áng trong hơn 50 năm nghiên cứu và giảng dạy [1]. Danh sách gồm 121 bài báo trải dài từ năm 1955 đến năm 2005 (50 măm).

1 Displacement thickness in compressible viscous flow, Memoire presented to the Institute of Aeronautical Sciences IAS Fort Worth Texas (USA) 1955.

2 (with M. L. Williams) Some radiation problems in elastodynamics, GALCIT (1957) ⇐ Đây là luận án tiến sĩ của thầy, do GS M.L. Williams hướng dẫn. Luận án nghiên cứu ba bài toán truyền sóng trong môi trường đàn hồi có hiện diện của vết nứt.

3 (with M. L. Williams) On the stress Distribution at the Base of a stationary Crack. J. Appl. Mech. 24 (1957) 109-114.

4 (with M.L.Williams) The dynamic stress field due to an extensional dislocation. Proc. Midwestern Conf. Solid Mech. (USA) 1959.

5 Radiation waves from a line load moving along a crack, J. Math. Phys. 38 (1960).

6 Transient motion of a line load on the surface of an elastic half-space, Quart. App. Math 18. (1960).

7 (with M. L. Williams) Diffraction of scalar elastic waves by a semi-infinite strip, GALCIT (1961).

8 (with M. L. Williams) Diffraction of vector elastic waves by a semi-infinite strip, GALCIT (1961).

9 (with M. L. Williams) A finite crack in an orthotropic medium, J. App. Mech (1961).

10 (with M. L. Williams) Diffraction of scalar elastic waves by a semi-infinite crack, GALCIT (1962).

11 (with M. L. Williams) Diffraction of vector elastic waves by a semi-infinite crack, GALCIT (1963).

12 (with Es. Folias and M. L. Williams) A finite crack in a plate on an elastis foundation, J Appl. Mech. 03- APM-1 (1963).

13 (with L. Knopoff) Diffraction scalar elastic waves by a finite strip, Proc. US Natl Academy of Sci. 51 No. 3 (1964).

14 (with L. Knopoff) Diffraction of vector elastic waves by a finite strip, Proc. US Natl Academy of Sci. 51 No. 3 (1964).

15 (with L. Knopoff) Diffraction of scalar elastic waves by a finite crack, Proc. US Natl Academy of Sci. 51 No. 3 (1964).

16 (with L. Knopoff) Diffraction of vector elastic waves by a finite crack, Proc. US Natl Academy of Sci. 51 No. 3 (1964).

17 (with D. E. Daykin) A note on successive Approx. Mathematika 14 (1967).

18 (with Mal and Knopoff) Diffraction of elastic waves by a penny-shaped strip, Proc. Cambridge Phil. Soc. 64 (1968).

19 A nonlinear temperature problem as a finite strip, Proc. Amer. Math. Soc. 20#2 (1969) $\Leftarrow$ Các bài báo trên đều đề cập đến ứng dụng toán vào cơ học (cơ học phá hủy, sóng trong môi trường đàn hồi). Sau đó ngoài các bài báo về cơ học xuất hiện các bài báo có tính chất toán học thuần thuần túy hơn.

20 (with D. E. Daykin and T. K. Sheng) On Schoenberg's rational polygon problem J. Australian Math. Soc Vol. IX (1969) pp 337-344.

21 A convolution equation on a half-line J. Math. Analysis and Appl. 24 No. 3 (1968). Correction Ibid 29 no 2 (1970).

22 A convolution equation on a compact interval J. London. Math. Soc. (2) No. 2 (1970)

23 Note on a theorem of Wiener and Pitt, Mathematika 17 (1970).

24 (with L. Knopoff) A two-Phase Stefan problem with melting point gradient. Publ. # 801 , Institute of Geophysics, UCLA, 1971. ⇐ Bài toán Stefan 2-pha thuộc lớp bài toán biên tự do.

25 (with L. Knopoff) A note on L1 - approximation by exponential polynomials and Laguerre polynomials J. Approximation Theory 6 (1972).

26 (with Vu Trang Tuan) An elementary proof of the Morse-Palais Lemma. Proc. Amer. Math. Soc 39 No 3 (1973).

27 (with Le Roan Hoa) On contractive operators in Hilbert spaces Math. Proc. Cambridges Phil. Soc. 85 (1979).

28 (with Vu Trong Tuan) A representation theorem for differentiable functions. Proc. Amer. Soc. 75 (1979).

29 Degree of set-valued vector fields and its applications J. Math. Analysis and Appl. 80 (1981).

30 (with Dinh Ngoc Thanh) A probabilistic analogue of the Bohnenblust-Karlin fixed point theorem. Revue Roumaine Math. Pures et Appl. 26 No. 4 (1981).

31 (with D. M. Due, D. N. Thanh) Relative topological degree of set-valued compact vector fields and its applications. J.Math. Anal. Appl. 80 (1981), No. 2, 406-432.

32 (with Le Roan Hoa) On a fixed point theorem of Krasnoselskii and triangle contractive operators Fund. Math. CXX (1984) 77-98.

33 Stabilized approximate solutions of certain integral equations of first kind in contact problems of Elasticity Intern. J. Fracture (1984). ⇐ Bài toán tiếp xúc trong lý thuyết đàn hồi.

34 The inverse time problem for a diffusion equation Proc. Workshop Math. Probl. Geophysics, IGU. Venice. Dec. 1984.

35 Stabilized approximate solutions of the inverse time problem for a parabolic evolution equation, J. Math. Analysis and Appl. Vol. 111, No. 1, 1985.

36 (with D. D. Hai) Regularization of Abel's integral equation Proc. Roy. Soc. Edinburgh (1987)

37 (with Alain Pham, N. D.) Mixed problem for a semi-linear wave equation with nonhomogeneous boundary conditions Nonlinear Analysis TMA. Sept. 1988.

38 (with Alain Pham, N. D.) Strong solutions of a quasilinear wave equations with nonlinear damping SIAM J. Math. Analysis. March 1988.

39 (with Alain Pham, N. D.) On a strongly damped wave equation SIAM J. Math. Anal. Nov 1988.

40 (with Keinert and Stenger) A two-phase nonlinear Stefan problem with melting point gradient: a constructive approach J. Appl. and Comp. Math. (1988). ⇐ Lại là bài toán Stefan 2 pha.

41 (with P.N.Dinh) On some viscoelastic strongly damped nonlinear wave equations. Nonlinear hyperbolic equations theory, computation methods, and applications (Aachen, 1988), 499-509, Notes Numer. Fluid Mech., 25, Vieweg, Braunschweig, 1989. ⇐ Bài toán truyền sóng trong môi trường đàn nhớt.

42 (with Stenger and Lund) Complex variables and regularization methods for the inverse Laplace transform Math. Comput. Oct 1989, 589-608.

43 (with Folias. Keinert and Stenger) Indentation and viscoplastic flow: a free boundary problem Intern. J. Fracture (a special issue in honor of ML Williams) 1989. ⇐ Bài toán biên tự do trong cơ học xâm nhập.

44 (with Alain Pham. N. D.) Some Viscoelastic wave Equations Intern. J. Fracture, 1989. ⇐ Bài toán truyền sóng trong môi trường đàn nhớt.

45 A pseudo-parabolic equation Proc. Iternl Conf. Diff. Eqns, Oberwolfach, 1989.

46 (with D.D.Hai) On nonsmooth solutions of Abel's integral equation. Differential Integral Equations 3 (1990), No. 2, 397-400.

47 (with K.Schmitt and L.K.Vy) Noncoercive variational inequalities: some applications, Nonlinear Analysis, TMS 15 No. 6 (1990), 497-512.

48 (with T. Thanh/ A nonlinear pseudo-parabolic equation, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 114 A (1990). 119-133.

49 On backward parabolic equation: A critical survey of some current methods, Numerical Analysis and Math. Modeling, Publication Banach Math. International Center 24, Warsaw 1990. pp. 509-515.

50 (with K. Schmitt and L. K. Vy) Variational inequalities and the contact of plates, Leet. Notes Pure and Appl. Math. M. Dekker 133 (1991), pp 1-19.

51 (with R. Gorenflo) A nonlinear Abel integral equation. Leet. Notes Control and Information Sciences. Editors Hoffmann-Krabs, Springer (1991), 26-37.

52 (with E. S. Folias and F. Keinert) Penetration mechanics: predicting the location of a viscoplatic boundary and its effects on the stresses, International J. Solids and Structures 28 (1991). ⇐ Bài toán biên tự do trong cơ học xâm nhập.

53 (with L. K. Vy) Stablized approximation of parameters in a variational inequality, 1991.

54 (with D. D. Hai) On the backward parabolic equation, Ann. Polon. Math. LII (1991).

55 (with R.Gorenflo) A nonlinear Abel integral equation Leet. Notes on Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Hoffmann-Krabs Edits, 1991, pp 26-37.

56 (with R. Gorenflo and L. K. Vy) Backus-Gilbert regularization for a moment problem. Preprint, Series A, Math, Institute, Berlin Free University, 1991.

57 (with E. S. Folias and M. L. Williams) The bending stress in a cracked plate on an elastic foundation, J. Appl. Mechanics paper No. 63 - APN - 1, 1963. ⇐ Bài toán vết nứt (cơ học phá hủy).

58 (with D. D. Hai) Regularization of a generalized Abel integral equation, Applicable Analysis 45 pp 424-432, 1992.

59 (with L. K. Vy) Regularized solutions of a three-dimensional inverse scattering problem, Inverse Problems 8 (1992), 499-507.

60 (with L. K. Vy) Identification of coefficients in an inhomogeneous Helmholtz equation by asymptotic regularization, Inverse Problems 8 (1992), 308-523.

61 (with R. Gorenflo and D. D. Hai) Regularization of generalized Abel integral equation, Applicable Analysis 45 (1992), 331-332.

62 (with K. Schmitt and L. K. Vy) P-coercive variational inequalities and unilateral problems for Von Karman's equations, WSSIA A 1, World Scientific Publ. (1992), 15-29.

63 (with K. Schmitt and L. K. Vy) P-coercive variational inequalities and unilateral problems for Von Karman's equations, Lakshmikantham Ann. Volume in 1992.

64 Stress singularities in a cracked orthotropic plate, Internatl J. Fracture, 1992. ⇐ Bài toán vết nứt.

65 (with L. K. Vy) Contact of a plate with an elastic body: an interface model, J. Elasticity, 1992 ⇐ Bài toán tiếp xúc trong lý thuyết đàn hồi.

66 (with D. N. Thanh and V. V. Thanh) Regularized solutions of a Cauchy problem for the Laplace equation in an irregular strip, J. Integ. Eqs and Applies (1993), 429-441.

67 (with L. K. Vy and R. Gorenflo) A Regularization method for the moment problem, In "Inverse Problem: Principles and Applications", Math. Research Vol. 74, Akademic Verlag 1993, 37-44.

68 (with L. K. Vy) Stabilized approximation of parameters in a variational inequality, Model Optimization in Exploration Geophysics 6 (1993), 1-16.

69 (with L. K. Vy and R. Gorenflo) Backus-Gilbert regularization of a moment problem, Preprint No. A-7 98, Institute of Mathematics, Freie Universitat Berlin, 1993.

70 (with L. K. Vy) Stabilized approx. of parameters of a parabolic variational inequality Ninth International Seminar on model Optim. and Exploration geophysics Friedr. Vieweg and Sons, 1993.

71 Model optimization in Exploration Geophysics Vol. 3 (A.Vogel edit.) 1993.

72 (with D. D.Trong) Asymptotic behavior of solutions of the equations of compressible heat conductive flows, Proceedings, International Conf. "Geometric Analysis and Continumm Mechanics" in honor of Robert Finn, Standford U., Calif, August 1993, International Press, 1995.

73 (with D. D. Trang) Coefficient identification for a parabolic equation, Inverse Problems 10 (1994), 733-752.

74 (with D. D. Trong) Global solutions of a free boundary problem in heat and mass transfer for polymeric materials, Results in Mathematics 26 (1994), 155-177.

75 (with R. Gorenflo) Degenerate and nondegenerate nonlinear Abel integral equations of the first kind, Nonlinear Analysis TMA 22, No. 1 (1994), 63-72.

76 (with L. K. Vy) Contact of a plate with an elastic body: an interface model, J. Elasticity 35 (1994), pp 1-26. ⇐ Bài toán tiếp xúc trong lý thuyết đàn hồi.

77 (with L. K. Vy) More on applications and extensions of P-coercive variational inequalities, Acta Math. Vietnam 19 (1994), 51-70. .

78 (with R. Gorenflo) Degenerate and non degenerate nonlinear Abel integral equations of first kind, 1994.

79 (with N. Cam) Remarks on the identification problem for elliptic equations, Proceedings, International Workshop "Inverse Problems" HoChiMinh City, January 1995, editors: Ang-Gorenflo et Al., Public. No. 2,.HoChiMinh Math. Soc., 1995, 21-23.

80 (with R. Gorenflo and D. N. Thanh) Regularization for a two dimensional inverse Stefan problem, Proceedings, International Workshop "Inverse Problems" HoChiMinh City, January 1995, editors: Ang-Gorenflo et al. Public, No. 2, HoChiMinh Math. Soc., 1995, pp. 45-54.

81 (with L. K. Vy) Domain identification for harmonic functions, Acta Applicandae Mathematicae 38 (1995), 217-238.

82 (with L. K. Vy) Some extensions and applications of P-coercive variational inequalities, Proceedings, First World Congress of Nonlinear Analysts, De Gruyter, Berlin (1995).

83 (with L. K. Vy) Contact of a plate with an elastic body, Zeitschrift f.' Ang. Mathematik u. Mech. (ZAMM) 75 No. 2 (1995), 115-126. ⇐ Bài toán tiếp xúc trong lý thuyết đàn hồi.

84 (with L. K. Vy) Frictional contact of an elastic body with a rigid support, Nonlinear Analysis TMA 25 No. 4 (1995), 339-343. ⇐ Bài toán tiếp xúc trong lý thuyết đàn hồi.

85 (with L. K. Vy) Domain Identification for Harmonic Functions. Acta Applicandae. Math. 38, 1995, 217-238

86 (with D. D. Trong) More on coefficient identification for a parabolic equation. Inverse problems and applications to geophysics, industry, medicine and technology (HoChiMinh, 1995), 170-173, Publ.HoChiMinh City Math. Soc., 2, HoChiMinh City Math. Soc., HoChiMinh City, 1995.

87 (with V. V. Thanh) Extrapolation in gravimetry: a moment problem. Numerical analysis and applications (HoChiMinh City, 1995), 11-14, Publ. HoChiMinh City Math.Soc., 4, HoChiMinh City math. Soc., HoChiMinh City, 1995.

88 (with V. V. Thanh) A regularized solution of an inverse problem of gravimetry. HoChiMinh City Math.Soc. 1995.

89 (with B. D. Khanh, C. D. Khanh) A numerical resolution of the exterior inverse Radon transform problem, 53-59, Publ. HoChiMinh City, Math.Soc. (1995).

90 (with D. D. Trong and Yamamoto): Unique Continuation and Identification of Boundary of an Elastic Body: Journal of Inverse and Ill-posed Problems, No. 6, 1996, 417-428.

91 (with R.Gorenflo and D.N.Thanh) Determination of shape and mass density gravity anomaly measurements: some uniqueness results, preprint A 14-97, F. Mathematik und Informatik, Serie A - Mathematik, Free University Berlin.

92 (with R. Gorenflo and L. K. Vy) Uniqueness theorem for a nonlinear integral equations of gravimetry, Proc.World Congress of Nonlinear Analysts (1992), Walter de Gruyter, Berlin (1996) pp. 2423-2430.

93 Cauchy problem and domain identification for elliptic equations and systems: a restricted survey pp 1-14, proc. 5th Vietnam Math. Conf. Hanoi September 17-20, 1997.

94 (with R. Gorenflo and L. K. Vy) Regularization of a nonlinear integral equation of gravimetry, J.Inv.Ill-posed Problems 5 # 2 (1997) 101-116.

95 Cauchy's problem and domain identification for Elliptic equations and systems: A restricted Survey, Proceedings, Fifth Vietnamese Math. Conf Hanoi, Sep. 1997. Editors: P. K. Anh, H. H. Khoai, N. V. Mau, N. K. Son, D. T. Thi, N. D. Tien, D. L. Van.

96 (A. Pham, N. D and D. N. Thanh) Regularization of a 2-dimensional two phase inverse Stefan problem, Inverse Problems 13 (1997) 607-619.

97 (with K. Schmitt and L. K. Vy) A multidimensional analogue of the Denjoy-Perron- Henstock-Kurzweil integral, Bull. Belg. Math. Soc.4 (1997) pp. 335-371.

98 (with D. D.Trong) Crack detection by the electric method: uniqueness and approximation, Intern. J. Fracture 93, pp 1-4 (1998).

99 (with D. D. Trong) Crack Detection by the Electric Method: Uniqueness and Approximation. Internatinal J. of Fracture 93 (1998), 63-86.

100 (with Ikehata, M., Trong and M. Yamamoto) Unique Contituation for a Stationary Isotropic Lame System with Variable Coefficients. Comm. In Partial Diff. Eqns. 23 (1998), 371-385.

101 (with N. H. Nghia and N. C. Tam) Regularized solutions of a Cauchy problem for the Laplace equation in an irregular layer: a 3-D model. Acta. Math. Vietnam 23, 1998, 65-74.

102 (with D. D. Trong) Domain identification for nonlinear elliptic equation. Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen 17 (1998) 4, 1021-1024.

103 (with N. V. Nhan, D. N. Thanh) A nonlinear integral equation of gravimetry: uniqueness and approximation by linear moments. Vietnam J. Math 27 (1999), No. 1, 61-67.

104 (with D.D.Trong and Yamamoto) Identification of Cavities Inside 2-dimensional Heterogeneous Isotropic Elastic Body. J. of Elasticity 56 (1999), 199-212.

105 (with R.Gorenflo and D. D. Trong) A multidimensional Hausdorff moment problem: Regularization by finite moments, ZAA 1 (1999) o.l, pp.13-25.

106 (with D. N. Thanh and V. V. Thanh) Ident ification of mass inhomog. from surface gravity anomalies, Geophysics. J. Int. (2000) 495-498.

107 Detection of cavities in solids and solutions of elliptic equations and systems. Vietnam J. Math. 29:1 (2001) 1-14.

108 (with D. N. Thanh and V. V. Thanh) Identification of mass inhomogeneity from surface gravity anomalies, Geophysical J. International (Royal Astronomical Society) Vol.143 No., Nov-2002.

109 (with D.D.Trong) Crack Detection in Plane Semilinear Elliptic Equations in the Plane: the Zero Flux Case. Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen 19 (2001), 109-120.

110 (with L. K. Vy) Contact of a viscoelastic body with a rough rigid surface and identification of coefficients, J. Inverse and Ill-Posed Problems 9 No.l pp.1-20 (2001).

111 (with N. Dung and D. D. Trong) Boundary identification for an elastic solid partly immersed in a liquid, Vietnam J. Mechanics 24 (2002) No.1 pp.1-13.

112 (with R. Menniken, D. N. Thanh and D. D. Trong) Cavity Detection by Electric Method: The 3-dimensional Case (in ZAMM) (2003-2004).

113 (with N. Dung, N. V. Huy and D. D. Trong) Uniqueness of elastic continuation in a semilinear elastic body, Vietnam J. Mechanics 25 2003 No. l pp.1-8.

114 (with P. T. Trinh) Inverse problems in geosciences, J. Geology series B, No.13- 14/ 1999 pp.194-199.

115 (with D. D. Trong, M. Yamamoto) A Cauchy problem for elliptic equations: quasi-reversibility and error estimates. Vietnam J. Math (2004).

116 (with D. D. Trong) Identification of cavities in a three dimensional elastic body. Z.Anal. Anwendungen 23 (2004) , No.2, 407-422.

117 (with L. K. Vy, D. D. Trong) Reconstruction of an analytic function from a sequence of values: existence and regularization. Finite or infinite dimensional complex analysis and applications, 127-142, Adv. Complex Anal. Appl., 2, Kluwer Acad. Publ. 2004.

118 (with F. Folias, F. Keinert and F. Stenger) Viscoelastic fl.ow due to penetration: a free boundary value problem Structural Integrity: Theory and Experiment, Kluwer Acad. Publishers. 1989. ⇐ Bài toán biên tự do trong cơ học xâm nhập.

119 (with C. D. Khanh, M. Yamamoto) A Cauchy like problem in plane elasticity: a moment theoretic approach, Vietnam J. Math 32 SI, pp.19-32, 2004.

120 (with D. D. Trong) Identification of cavities in a 3-D elastic body, Vietnam J. Math 33: 4, pp 407-422, 2004.

121 Stress field in an elastic strip in frictionless contact with a rigid stamp, Vietnam J. Math 33:4, pp. 469-4 75, 2005. ⇐ Bài toán tiếp xúc trong lý thuyết đàn hồi.

+ Trong khoảng mười lăm năm đầu các khảo cứu của thầy tập trung vào các bài toán thuộc lãnh vực cơ học. Điều này cũng dễ hiểu vì thầy được đào tạo để trở thành một kỹ sư hàng không.

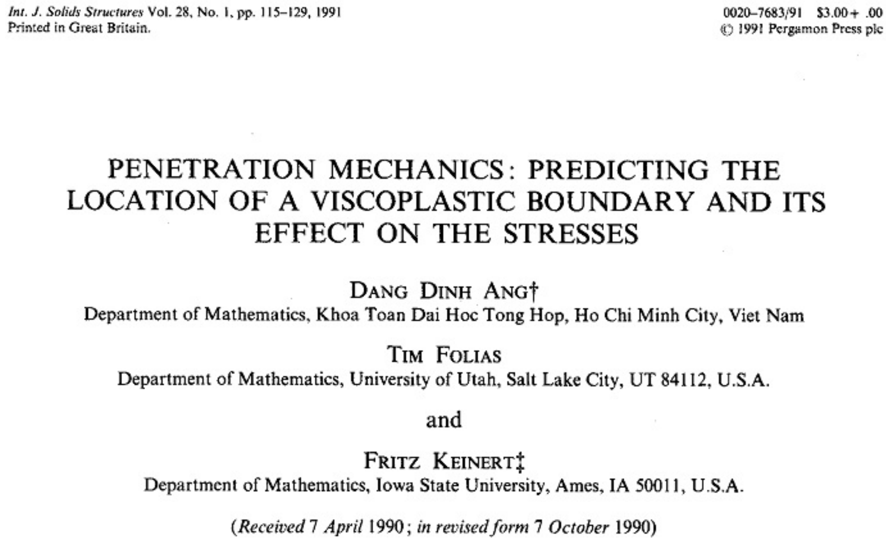
+ Các đề tài về cơ học, vật lý liên quan đến nhiều lãnh vực: lý thuyết vết nứt (cơ học phá hủy); lý thuyết truyền sóng trong môi trường đàn hồi, đàn nhớt; bài toán tiếp xúc (bài toán không gian trong lý thuyết đàn hồi); bài toán biên tự do (trong cơ học xâm nhập, lý thuyết truyền nhiệt).

+ Có thể nói thầy là một người nghiên cứu toán ứng dụng.

Có bốn giai đoạn trong nghiên cứu toán học ứng dụng [2]:

1) Phát biểu bài toán toán học (mô hình toán học);
2) Chọn phương pháp nghiên cứu bài toán toán học;
3) Tiến hành nghiên cứu toán học (bao gồm cả việc tính toán xấp xỉ);
4) Phân tích và biểu thị kết quả.

Bốn giai đoạn này không phân biệt rạch ròi, ảnh hưởng lẫn nhau. Giai đoạn 2) và 3) là hai giai đoạn quan trọng nhất.


Int. J. Solids Structures Vol. 28, No. 1, pp. 115–129, 1991
Printed in Great Britain.
0020–7683/91 $3.00 + .00
© 1991 Pergamon Press plc

PENETRATION MECHANICS: PREDICTING THE LOCATION OF A VISCOPLASTIC BOUNDARY AND ITS EFFECT ON THE STRESSES

DANG DINH ANG†
Department of Mathematics, Khoa Toan Dai Hoc Tong Hop, Ho Chi Minh City, Viet Nam

TIM FOLIAS
Department of Mathematics, University of Utah, Salt Lake City, UT 84112, U.S.A.

and

FRITZ KEINERT‡
Department of Mathematics, Iowa State University, Ames, IA 50011, U.S.A.

(*Received* 7 *April* 1990; *in revised form* 7 *October* 1990)

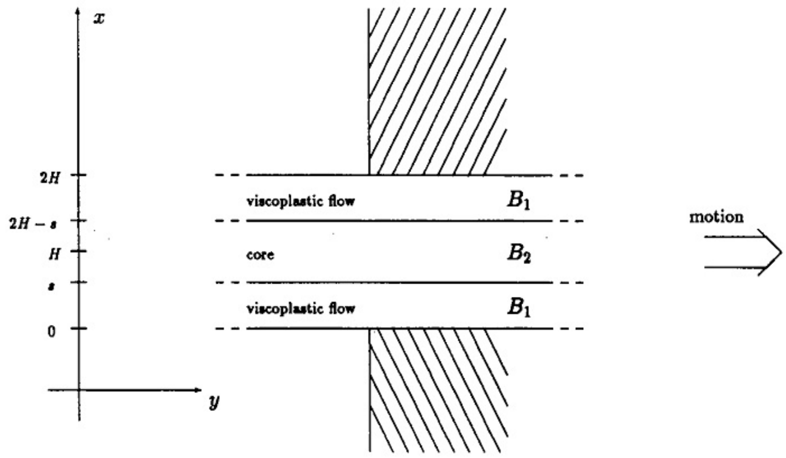
Hình 1: Tựa bài báo **52**.

+ Trong bài nói chuyện này chúng tôi chọn bài báo **52**, "Penetration mechanics: predicting the location of a viscoplatic boundary and its effects on the stresses, (1991)" để bàn luận về cách thầy đã thực hiện các giai đoạn nghiên cứu đã nói ở trên, qua đó, giới thiệu một cách hình dung về thầy.

2 Bài báo 52

+ Cơ học xâm nhập là lãnh vực cơ học có liên quan đền nhiều ngành kỹ thuật hiện đại như kỹ thuật dập nóng, kỹ thuật kéo sợi kim loại, kỹ thuật cán thép... Ngoài ra, một số kết quả của lý thuyết này còn được sử dụng trong thiết kế đường giao thông phủ nhựa đường, chế tạo đệm giảm chấn...

Hình 2: Cơ học xâm nhập - Máy cán ống thép



Hình 3: Cấu hình bài toán

2.1 Phát biểu bài toán toán học

+ Mô hình hóa toán học trong cơ học gồm có hai công việc chính:

1) Sơ đồ hóa các vật thể.

- Về số chiều của vật thể. Nói chung một vật thể trong cơ học là 3-chiều. Một vật thể có thể có một, hai hoặc ba kích thước là nhỏ so với các kích thước còn lại khi đó ta có thể mô hình vật thể như là 2-, 1-, 0-chiều (0-chiều là chất điểm). Cũng có thể các đại lượng của bài toán chỉ phụ thuộc vào một hoặc hai biến không gian thì khi đó ta có thể xem vật thể là 1- hoặc 2-chiều,

- Về vật liệu. Vật thể có thể là cố thể (vật rắn tuyệt đối) hoặc vật thể bị biến dạng.

2) Tính toán các tương tác. Tương tác trong cơ học là lực. Đối với vật rắn tuyệt đối ta có mối liên hệ giữa lực ngoài với chuyển động là

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Đối với các vật bị biến dạng, ngoài lực ngoài còn phải kể đến ứng suất (lực trong). Các ứng suất có quan hệ với biến dạng thông qua các phương trình gọi là quy luật ứng xử của vật liệu.

+ Khi mô hình hóa toán học ta dùng suy luận hợp lý.

> *Sự thật là một cái gì đó rất lớn lao mà ta không được coi nhẹ bất kỳ điều gì có thể dẫn tới nó.*
> *Montaigue*

+ Một vật thể có thể bị biến dạng B xâm nhập vào vật thể khác dưới tác dụng của lực ngoài. Thầy dùng mô hình 1-chiều (không gian), điều này cho phép đơn giản hóa việc mô tả toán học các đối tượng tham gia vào bài toán (xem hình 3).

+ Đối tượng khảo sát là vật thể B. Để thiết lập phương trình vi phân mô tả chuyển động ta cần biết B là vật liệu gì? Hay nói khác đi, quan hệ giữa ứng suất pháp σ (hay ứng suất tiếp τ) với độ giãn tương đối ϵ (hay độ trượt tương đối γ) trong vật thể B là gì? Chắc hẳn ở đây có sự cân nhắc... và thầy đã chọn mô hình chất lỏng nhớt Bingham.

Giải thích một chút về cách xây dựng mô hình vật liệu 1-chiều. Một cách toán học, quan hệ ứng suất - biến dạng có dạng

$$\Phi(\sigma, \epsilon, \dot{\sigma}, \dot{\epsilon}, \ddot{\sigma}, \ddot{\epsilon}, \dots, \sigma^{(n)}, \epsilon^{(n)}) = 0,$$

trong đó σ là ứng suất pháp, ϵ là độ giãn dài tương ứng. Các phần tử cơ bản là

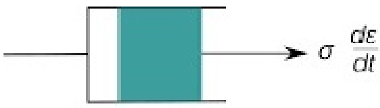
- Phần tử đàn hồi tuân theo quy luật Hooke

$$\sigma = E\epsilon.$$

- Phần tử (chất lỏng) nhớt tuân theo quy luật nhớt Newton

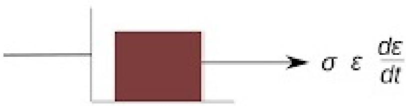
$$\sigma = \mu \frac{d\epsilon}{dt}.$$

Hình 4: Phần tử đàn hồi.



Hình 5: Phần tử chất lỏng nhớt.

• Phần tử cứng dẻo với các ứng suất thấp hơn giới hạn chảy thì không bị biến dạng ($\epsilon = 0$); chỉ với ứng suất thỏa điều kiện chảy ($\sigma = \sigma_y$) thì sự chảy mới phát triển (định luật Coulomb).



Hình 6: Phần tử cứng dẻo.

Người ta ghép song song hoặc nối tiếp các phần tử cơ bản để có các mô hình mong muốn. Các tham số (E, μ, σ_y,. . .) được xác định nhờ thực nghiệm.

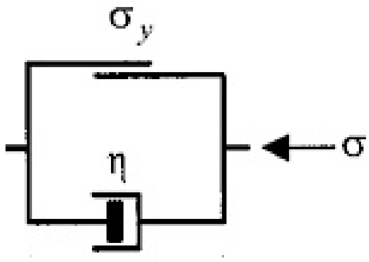
+ Ghép song song hai yếu tố nhớt và cứng dẻo ta được mô hình dẻo nhớt Bingham.

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_y + \mu\frac{d\epsilon}{dt} & \text{nếu} \quad |\sigma| = \sigma_y \\ \sigma_y & \text{nếu} \quad |\sigma| < \sigma_y \end{cases}$$

+ Sơ đồ vật liệu Bingham phản ánh một thực tế là đối với nhiều vật liệu sự chảy đáng kể chỉ xuất hiện với tải trọng xác định, đồng thời tốc độ chảy phụ thuộc vào độ nhớt môi trường. Thực nghiệm cho thấy nhiều vật liệu thực - các kim loại với nhiệt độ đủ cao, các chất bôi trơn đặc quánh khác nhau, các loại sơn v.v. . . - được đặc trưng bằng các tính chất nhớt dẻo.

+ Trong bài báo **52**, do mô hình bài toán thầy dùng ứng suất tiếp τ^* với τ_0^* là ứng suất tới hạn (yield stress), u^* là vận tốc theo hướng y^*. Luật Bingham được viết như sau

$$\tau^*(x^*, t^*) - \tau_0^* = \mu\frac{\partial u^*}{\partial x^*}(x^*, t^*). \tag{1}$$



Hình 7: Sơ đồ dẻo nhớt Bingham

Ở đây các ký hiệu với chỉ số $*$ chỉ định chúng được đo theo đơn vị vật lý.

+ Gần mười năm trước bài báo của thầy, một tác giả người Nga, A.Ju. Ishlinskij, đã khảo sát một bài toán biên tự do với mô hình gần giống. Bài toán va chạm của thanh cứng - dẻo nhớt vào tường cứng. Trong đó tác giả dùng ứng suất pháp.

+ Khi vật thể B xâm nhập vào vật thể khác nó được chia thành hai miền tùy thuộc vào cách ứng xử

$$\begin{aligned} B_1 &= \{x^* : 0 < x^* < s^*(t^*) \text{ hay } 2H - s^*(t^*) < x^* < 2H\} \quad (\text{miền chảy dẻo}), \\ B_2 &= \{x^* : s^*(t^*) \le x^* \le 2H - s^*(t^*)\} \quad (\text{miền cứng hay lõi}). \end{aligned}$$

+ Trong miền chảy dẻo B_1, từ phương trình cơ bản động lực học Newton kết hợp với phương trình ứng xử (1), ta thu được phương trình mô tả chuyển động của B_1

$$\rho u^*_{t^*}(x^*, t^*) = \mu u^*_{x^*x^*}(x^*, t^*) + g^*(t^*), \tag{2}$$

trong đó g^* là lực trên đơn vị thể tích do lực ngoài tác dụng theo hướng y và ρ là mật độ khối.

+ Trong miền cứng B_2, vì vận tốc của mọi chất điểm là như nhau nên

$$u^*_0(t^*) = u^*(s^*(t^*), t^*). \tag{3}$$

+ Để khảo sát toán học ta đưa vào các biến không thứ nguyên, các phương trình trên thành:

$$\tau(x, t) - 1 = \frac{1}{S} u_x(x, t), \tag{4}$$

và

$$u_t(x, t) = \frac{1}{R} u_{xx}(x, t) + \frac{S}{R} g(t), \tag{5}$$

trong đó

$$R = \frac{\rho H^2}{\mu T}, \quad S = \frac{\tau_0 T}{\mu}. \tag{6}$$

Ở đây T là thời gian đặc trưng, còn R là số Reynolds quen thuộc.

Đặt bài toán toán học

> *Phát biểu bài toán một cách đúng đắn là một vấn đề không kém phần phức tạp so với chính việc giải bài toán đó và không nên hy vọng ở một người khác làm được thay cho anh.*
> *N.S. Bakhvalov*

\+ Do tính đối xứng chỉ cần xét phương trình (5) trong miền $0 < x < s(t)$. Trên biên di động $s(t)$, ứng suất tiếp bằng ứng suất tới hạn, nên từ luật Bingham

$$u_x(s(t), t) = 0. \tag{7}$$

\+ Từ lực tác dụng lên phần cứng B_2, dùng phương cơ bản động lực học, ta có

$$\dot{u}_0(t) = \frac{S}{R} g(t) - \frac{S}{R(1 - s(t))}. \tag{8}$$

vì (dùng bởi (7))

$$\dot{u}_0(t) = \frac{d}{dt}[u(s(t), t)] = u_x(s(t), t)\dot{s}(t) + u_t(s(t), t) = u_t(s(t), t),$$

phương trình (8) có thể viết là [khi $x \downarrow s(t)$ trong miền B_2]

$$u_t(s(t), t) = \frac{S}{R} g(t) - \frac{S}{R(1 - s(t))}. \tag{9}$$

Giả thiết tiên nghiệm về tính liên tục của nghiệm và các đạo hàm của nó lên đến biên, cho $x \uparrow s(t)$ trong (5), ta được

$$u_t(s(t), t) = \frac{1}{R} u_{xx}(s(t), t) + \frac{S}{R} g(t). \tag{10}$$

So sánh với (9), ta phải có

$$u_{xx}(s(t), t) = -\frac{S}{1 - s(t)}. \tag{11}$$

Đây là điều kiện biên tại biên di động $x = s(t)$. Điều kiện biên tại $x = 0$ giả sử được cho là

$$u(0, t) = f(t).$$

+ Điều kiện đầu của bài toán:

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad s(0) = b, \quad 0 < b < 1.$$

+ Phát biểu bài toán toán học, bài toán (I), xem hình 8.

Given a time $T_{\max} > 0$, we are looking for a pair of functions $u(x,t)$, $s(t)$ so that

- $s(t)$ is Lipschitz continuous on $(0, T_{\max}]$;
- u and u_x are continuous for $0 \leqslant x \leqslant s(t), 0 \leqslant t \leqslant T_{\max}$;
- u_{xx}, u_t are continuous in $0 \leqslant x \leqslant s(t)$ for $0 < t < T_{\max}$;
- u satisfies the equation

$$u_t(x,t) = \frac{1}{R} u_{xx}(x,t) + \frac{S}{R} g(t) \tag{17}$$

in $0 < x < s(t), 0 < t \leqslant T_{\max}$;
- on the moving boundary $s(t)$, u satisfies

$$\begin{aligned} u_t(s(t),t) &= \frac{S}{R} g(t) - \frac{S}{R(1-s(t))}, \\ u_x(s(t),t) &= 0, \\ u_{xx}(s(t),t) &= -\frac{S}{1-s(t)}, \end{aligned} \tag{18}$$

for $0 < t \leqslant T_{\max}$;
- u and s satisfy the boundary and initial conditions

$$\begin{aligned} s(0) &= b, \quad 0 < b < 1, \\ u(x,0) &= \phi(x), \\ u(0,t) &= f(t), \end{aligned} \tag{19}$$

with compatibility conditions

$$\begin{aligned} \phi(0) &= f(0), \\ \phi'(b) &= 0, \\ \phi''(b) &= -\frac{S}{1-b}. \end{aligned} \tag{20}$$

Hình 8: Tổng kết bài toán toán học (I).

2.2 Chọn phương pháp nghiên cứu và tiến hành nghiên cứu

+ Kể từ đây ta dùng suy luận suy diễn.

+ Bài toán được dẫn về phương trình tích phân để có thể giải bằng phép xấp xỉ tiếp, dùng nguyên lý ánh xạ co; một công cụ mạnh mà thầy quen dùng.

+ Bài toán (I) là bài toán hỗn hợp cho phương trình nhiệt. Ta dùng phương pháp hàm Green để giải. Nhắc lại, biểu thức vi phân

$$L^* v := a^2 v_{xx} + v_t$$

là liên hợp hình thức của

$$Lu := a^2 u_{xx} - u_t$$

trên miền Ω với biên $\partial\Omega$.

Ta có đồng nhất thức Green:

$$\int_{\Omega} (vLu - uL^*v)dxdt = \int_{\partial\Omega} uvd\xi + a^2(vu_x - uv_x)d\tau.$$

+ Nhưng trước hết để tránh điều kiện liên quan đến u_t trên biên tự do ta cần biến đổi bài toán (về một mô hình trung gian). Khác với các người làm cơ học, vật lý, việc biến đổi về phương trình tích phân được nêu giả thiết đầy đủ:

- $f(t)$ liên tục, $g(t)$ thuộc lớp C^1 trên $t \geq 0$;
- $\phi(x)$ thuộc lớp C^2 trên $(0, b)$, và đạo hàm bên trái $\phi''(b)$ tồn tại.

Đặt $v = u_t$. Bài toán được dẫn về bài toán (II), xem hình 9.

v must satisfy

$$\begin{aligned}
v_t(x,t) &= \frac{1}{R} v_{xx}(x,t) + \frac{S}{R}\dot{g}(t), \\
v(s(t),t) &= \frac{S}{R} g(t) - \frac{S}{R(1-s(t))}, \\
v_x(s(t),t) &= S\frac{\dot{s}(t)}{1-s(t)}, \\
v(x,0) &= \psi(x), \\
v(0,t) &= \dot{f}(t), \\
\psi(b) &= \frac{S}{R} g(0) - \frac{S}{R(1-b)}, \\
\dot{f}(0) &= \psi(0).
\end{aligned} \tag{28}$$

Assume for now that $s(t)$ is C^1 on $[0,\sigma]$.†

Hình 9: Tổng kết bài toán toán học (II).

Phương pháp hàm Green

+ Ký hiệu $k = R^{1/2}$. Định nghĩa các hàm Green

$$\begin{aligned} K(x,t;\xi,\tau) &= \frac{k}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{k^2(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right), \\ G(x,t;\xi,\tau) &= K(x,t;\xi,\tau) - K(x,t;-\xi,\tau), \\ N(x,t;\xi,\tau) &= K(x,t;\xi,\tau) + K(x,t;-\xi,\tau), \end{aligned} \tag{12}$$

với

$$0 < x < s(t),\ 0 < \xi < s(\tau),\ 0 < \tau < t. \tag{13}$$

Ta có các tính chất sau (được dùng đến trong các biến đổi về sau)

$$\begin{aligned} G_{x\xi} &= k^2 N_\tau, \\ G_x &= -N_x i, \\ N(x,t;\xi,t) &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

+ Cho $v(\xi,\tau)$, $s(\tau)$ là nghiệm của bài toán (II) với (x,t) được thay bởi (ξ,τ), chú ý G trong định nghĩa trên theo biến (ξ,τ) là nghiệm của phương trình liên hợp

$$L^*G(x,t;\xi,\tau) := \frac{1}{k^2}G_{\xi\xi} + G_\tau = 0.$$

Tích phân đồng nhất thức

$$(Gv_\xi - G_\xi v)_\xi - k^2(Gv)_\tau = SG\dot{g} \tag{15}$$

trên miền $\{(\xi,\tau) : 0 \le \xi \le s(\tau),\ \epsilon \le \tau \le t-\epsilon\}$, áp dụng đồng nhất thức Green, và cho $\epsilon \to 0$, ta được: [biểu diễn tích phân của nghiệm mô hình trung gian]

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \int_0^b \psi(\xi)G(x,t;\xi,0)d\xi - \frac{1}{R}\int_0^t v_0(\tau)G_\xi(x,t;s(\tau),\tau)d\tau \\ &\quad + \frac{1}{R}\int_0^t v_x(s(\tau),\tau)G(x,t;s(\tau),\tau)d\tau + \int_0^t v_0(\tau)G(x,t;s(\tau),\tau)\dot{s}(\tau)d\tau \\ &\quad + \frac{1}{R}\int_0^t \dot{f}(\tau)G_\xi(x,t;0,\tau)d\tau + \frac{S}{R}\int_0^t\int_0^{s(\tau)} G(x,t;\xi,\tau)d\xi\dot{g}(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{16}$$

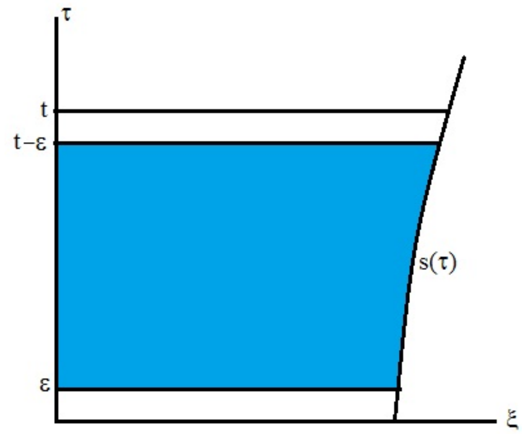
trong đó ta đã đặt

$$v_0(t) = v(s(t),t) \tag{17}$$

và dùng công thức

$$d\xi = \dot{s}(\tau)d\tau. \tag{18}$$

Để tính được tích phân này ta cần biết $s(t)$.



Hình 10: Miền lấy tích phân.

Xác định $s(t)$

+ Lấy đạo hàm riêng hai vế (16), dùng các tính chất (14), sau một số biến đổi, ta được:

$$\begin{aligned} v_x(x,t) &= \int_0^b \psi'(\xi)N(x,t;\xi,0)d\xi + \frac{1}{R}\int_0^t \dot{v}_0(\tau)N(x,t;s(\tau),\tau)d\tau \\ &+\frac{1}{R}\int_0^t v_x(s(\tau),\tau)G_x(x,t;s(\tau),\tau)d\tau - \frac{1}{R}\int_0^t \ddot{f}(\tau)N(x,t;0,\tau)d\tau \\ &-\frac{S}{R}\int_0^t \dot{g}(\tau)[N(x,t;s(\tau),\tau)-N(x,t;0,\tau)]d\tau. \end{aligned} \tag{19}$$

Bây giờ, cho $x \uparrow s(t)$ và dùng bổ đề từ Friedman,

Lemma 2.1 **(Friedman). Let $\rho(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \sigma)$ be a continuous function and let $s(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \sigma)$ satisfy a Lipschitz condition. Then, for every $0 < t \leqslant \sigma$,**

$$\lim_{x \to s(t)-0} \frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \rho(\tau)K(x,t;s(\tau),\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{k^2}{2}\rho(t) + \int_0^t \rho(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial x}K(x,t;s(\tau),\tau)\right]_{x=s(t)}\mathrm{d}\tau, \tag{43}$$

where K is as in (29).

Hình 11: Bổ đề từ Friedman.

ta được:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}v_x(s(t),t) &= \int_0^b \psi'(\xi)N(s(t),t;\xi,0)d\xi + \int_0^t \dot{v}_0(\tau)N(s(t),t;s(\tau),\tau)d\tau \\
&+\frac{1}{R}\int_0^t v_x(s(\tau),\tau)G_x(s(t),t;s(\tau),\tau)d\tau - \int_0^t \ddot{f}(\tau)N(s(t),t;0,\tau)d\tau \\
&-\frac{S}{R}\int_0^t \dot{g}(\tau)[N(s(t),t;s(\tau),\tau) - N(s(t),t;0,\tau)]d\tau. \qquad (20)
\end{aligned}$$

+ Định nghĩa

$$r(t) = \dot{s}(t), \qquad (21)$$

suy ra

$$s(t) = b + \int_0^t r(\tau)d\tau, \qquad (22)$$

và

$$\begin{aligned}
v_x(s(t),t) &= S\frac{r(t)}{1-s(t)}, \qquad (23)\\
v(s(t),t) &= \frac{S}{R}g(t) - \frac{S}{R(1-s(t))}, \qquad (24)\\
\dot{v}_0(t) &= \frac{S}{R}\dot{g}(t) - \frac{Sr(t)}{R(1-s(t))^2} \qquad (25)
\end{aligned}$$

Sau một số biến đổi đơn giản, cuối cùng ta được:

$$r(t) = \frac{2}{S}(1-s(t))B(r(t)), \qquad (26)$$

trong đó

$$\begin{aligned}
B(r(t)) &= \int_0^b \psi'(\xi)N(s(t),t;\xi,0)d\xi - \frac{S}{R}\int_0^t \frac{r(\tau)}{(1-s(\tau))^2}N(s(t),t;s(\tau),\tau)d\tau \\
&+\frac{S}{R}\int_0^t \frac{r(\tau)}{1-s(\tau)}G_x(s(t),t;s(\tau),\tau)d\tau \\
&-\int_0^t \left[\ddot{f}(\tau) - \frac{S}{R}\dot{g}(\tau)\right]N(s(t),t;0,\tau)d\tau. \qquad (27)
\end{aligned}$$

+ Có thể chỉ ra rằng tồn tại $M > 0$ và $\sigma > 0$ sao cho vế phải của (26) định nghĩa một ánh xạ co trên quả cầu đóng $B_\sigma(0,M)$, bán kính M, tâm 0 trong không gian các hàm liên tục trên $[0,\sigma]$. Do đó, đối với các giá trị nhỏ của t, phép lặp (26) sẽ cho một lời giải $r(t)$.

2.3 Tính toán xấp xỉ

+ Công thức (26) là cơ sở của phương pháp số.

+ Cho t_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, là các điểm cách đều theo hướng t. Cho trước một đề nghị cho $r(t)$, ta có thể tính $s(t)$ từ (22), rồi $B(r(t))$ từ (27), và cuối cùng cập nhật $r(t)$ từ (26).

+ Một khi $s(t)$ đã biết, ta tính $u_x(x,t)$ từ

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \int_0^b \psi'(\xi)N(x,t;\xi,0)d\xi - \frac{S}{R}\int_0^t \frac{1}{1-s(\tau)}N(x,t;s(\tau),\tau)d\tau \\ &\quad + \int_0^t \left[\frac{S}{R}g(\tau) - \dot{f}(\tau)\right] N(x,t;0,\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{28}$$

+ Cuối cùng, ta tính $u(x,t)$ từ (mô hình ban đầu của bài toán)

$$u(x,t) = f(t) + \int_0^x u_x(\xi,t)d\xi. \tag{29}$$

+ Vài trích dẫn:

"Ở lần lặp thứ i, chúng tôi chỉ sử dụng các giá trị của r tại $t_0, \ldots, t_i$, vì các dự đoán tốt của $r(t)$ cho t lớn không có hiệu lực. Đối với bước lặp $(i+1)$, chúng tôi đã thêm một điểm mới $r(t_{i+1})$, với dự đoán ban đầu

$$r(t_{i+1}) = 2r(t_i) - r(t_{i-1}). \tag{30}$$

"

"Ngoại trừ gần khi bắt đầu, chỉ cần bốn đến năm lần lặp cho mỗi điểm, kết hợp với phép ngoại suy, đã đủ để hội tụ. Chúng tôi đã sử dụng phép nội suy spline tự do để tính r, s tại các điểm trung gian và thủ tục lấy từ QUADPACK để tích phân số. Lưu ý rằng tích phân thứ hai và thứ ba trong (27) là kỳ dị, nhưng kỳ dị loại $[(t-\tau)^{-1/2}]$ được biết chính xác và có thể dễ dàng xử lý."

+ Bài báo kết thúc bằng hai thí dụ số. Tôi dẫn ra thí dụ 1, kèm bình luận của các tác giả và hình vẽ để tham khảo.

Thí dụ 1: "Chúng tôi bắt đầu với lời giải dòng chảy dừng tương ứng với $g(t) \equiv 2$, nghĩa là, $b = 0.5$, $\phi(x) = 0.25 - (x - 0.25)^2$. Rồi sau đó chúng tôi đặt $g(t) \equiv 0$, tương ứng với sự biến mất đột ngột của ngoại lực. Do đó, chuyển động chủ yếu bị chi phối bởi các lực nhớt.

Hình 2 thể hiện các đồ thị của biên di động, vận tốc lõi $u_0(t)$, vận tốc $u(x,t)$ và ứng suất $\tau(x,t)$ trong miền dòng chảy nhớt với các giá trị cố định khác nhau của x và t. Chúng tôi đã sử dụng bước thời gian nhỏ 0.001 để tạo ra các đường cong mượt mà; kết quả cho bước thời gian lớn hơn là rất tuyệt vời. Như ta mong đợi, lõi mở rộng nhanh chóng cho đến khi nó đạt đến biên $x = 0$.

Nếu $g(t)$ ban đầu được lấy là 2, sau đó giảm xuống 0, chúng tôi có được các phiên bản trượt theo thời gian của các đường cong giống nhau. Điều này chỉ ra rằng phương pháp có thể xử lý dễ dàng các lực bên ngoài không liên tục. Tất nhiên, tích phân cuối cùng trong (27), phải được sửa đổi để tính đến dáng điệu hàm delta của $\dot{g}(t)$."

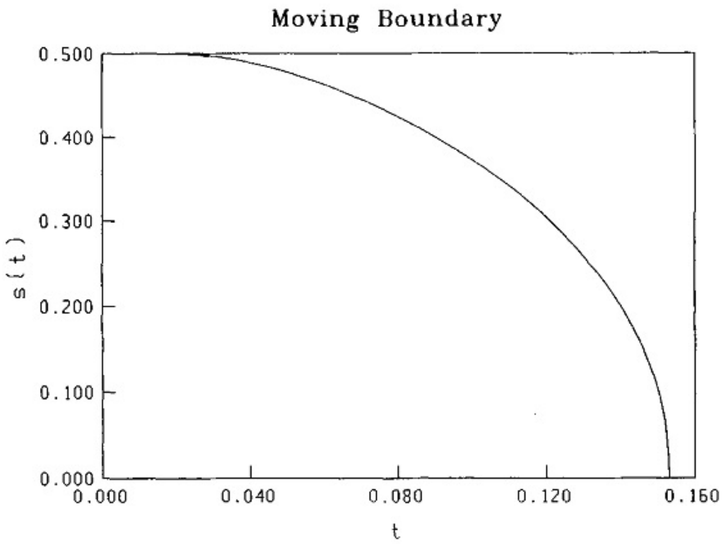


Fig. 2a. Example 1 : Moving boundary.

3 Kết luận

Để kết thúc bài nói chuyện về Thầy Áng tôi có một vài suy nghĩ cùng một số trích dẫn lấy từ [2] về việc học và làm toán ứng dụng.

> *...vì vậy mà trong toán học thuần túy việc bắt đầu nghiên cứu khoa học một cách độc lập đơn giản hơn so với trong toán học ứng dụng và đó là nguồn kích thích cơ bản đối với những người trẻ tuổi. Thành tựu trong lĩnh vực này lại khuyến khích đi sâu và chuyên môn hóa hơn nữa – và thế là trước mắt chúng tôi lại có một nhà toán học thuần túy trung kiên.*

Như đã nói ở Phần Mở đầu việc nghiên cứu toán ứng dụng bắt đầu bằng việc mô hình hóa toán học. Ta cần am hiểu một chút về cơ học, vật lý hoặc

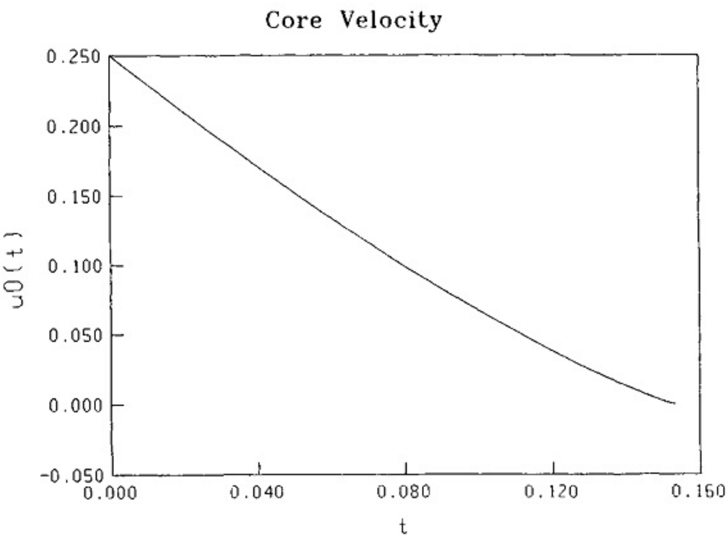


Fig. 2b. Example 1 : Core velocity.

các ngành khoa học liên quan để có thể chọn mô hình thích hợp và thiết lập các công thức toán học mô tả đối tượng khảo cứu.

> *...việc chấp nhận một mô hình toán học này hay khác phụ thuộc vào mục đích mà người nghiên cứu đặt ra, vào mức khoa học thực tế, và ở một mức độ nhất định, phụ thuộc vào những phương tiện nghiên cứu đã có.*
> *Nejmark Ju.K.*

> *Khi đặt bài toán thì điều kiện cần chú ý hàng đầu là giải thích mục đích nghiên cứu bởi vì một mô hình toán học đã được chấp nhận về một hiện tượng không phải là đơn trị luôn luôn có liên hệ với hiện tượng ấy, mà còn phụ thuộc vào mục tiêu nghiên cứu. Trước khi viết các phương trình vi phân, chọn phương pháp giải và dùng máy tính điện tử cần phải nghĩ xem liệu những kết quả tính toán có vô ích không*
> *N.S. Bakhvalov*

Việc chọn lựa phương pháp nghiên cứu và tiến hành nó dựa chủ yếu trên sở trường của ta. Tuy nhiên cũng có lúc cần phải học thêm về phương pháp mới để đáp ứng cho yêu cầu của mô hình mới. Thường, trong các bài toán mới xuất hiện trong khảo cứu, không có dạng đúng như những gì ta đã học, hoặc những tài liệu ta tham khảo. Lúc đó cần phải suy nghĩ thêm thay vì

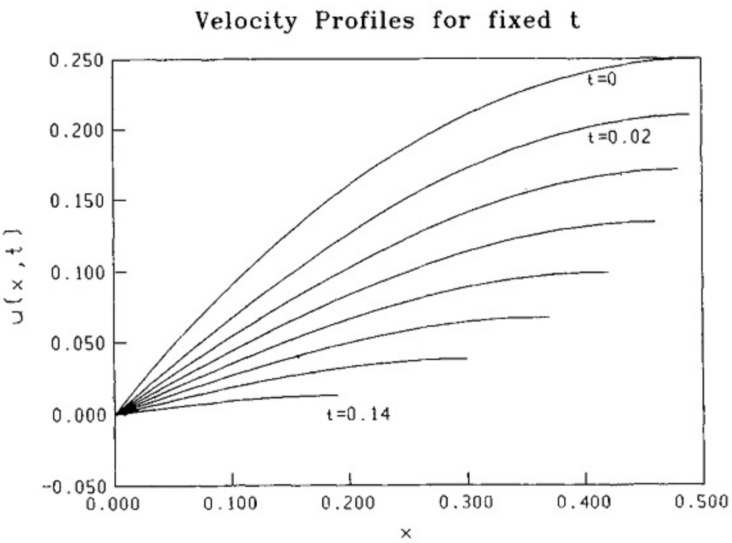


Fig. 2c. Example 1 : Velocity in flow zone for $t = 0$ to $t = 0.14$ in steps of 0.02.

. . . đi tìm các tài liệu tham khảo khác. Có thể, như ở đây, việc chọn một ẩn hàm mới làm thay đổi tình hình! Ta cũng thấy ở đây vai trò của môn toán cao cấp thật quan trọng. Không phải các kiến thức cao siêu mà chỉ là các khái niệm giới hạn, liên tục cùng một số tính chất của chúng.

Các bài toán ứng dụng thường gắn với phép tính xấp xỉ. Việc học tập thật nghiêm túc môn giải tích số là cần thiết. Nhưng vẫn cần phải tìm hiểu thêm khi tính toán trên máy tính điện tử. Ở đây ta làm việc trên số dấu chấm động (hữu hạn) khác với trong giải tích số ta làm việc trên số thực (vô hạn).

> *Ví dụ như khi xây dựng dòng chất lỏng bằng phương pháp lưới thì dễ lẫn lộn tính không ổn định của phương pháp tính với tính không ổn định của dòng chảy.*

> *Việc tính toán lành mạnh đòi hỏi phải thường xuyên nghiên cứu bài toán được nghiên cứu, không phải trước khi tổ chức tính toán mà còn ngay cả trong quá trình phát triển nó, và nhất là ở giai đoạn khi những con số được trả về và được giải thích bằng ngôn ngữ của bài toán ban đầu.*
> *R. Hamming*

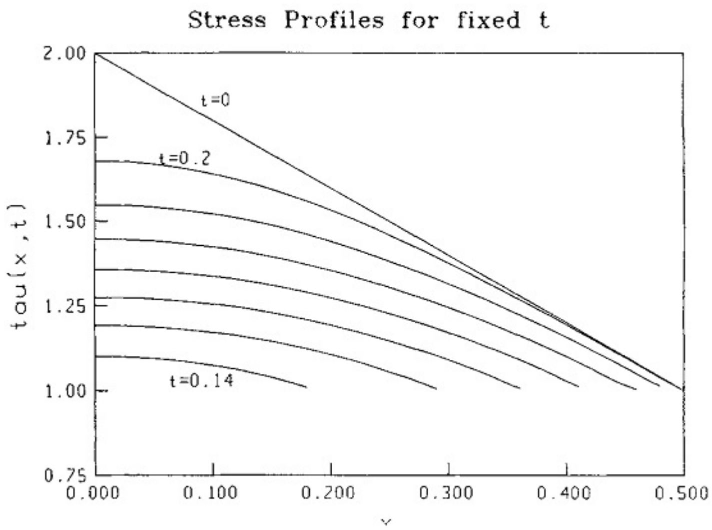


Fig. 2d. Example 1 : Stress in flow zone for $t = 0$ to $t = 0.14$ in steps of 0.02.

Việc tin tưởng rằng nghiệm đã được tính đúng được đảm bảo qua việc áp dụng cùng một sơ đồ tính cho một vài bài toán mà nghiệm chính xác của chúng đã biết trước, qua việc so sánh những những kết quả tính với thí nghiệm vật lý trong miền tham số có thể thực hiện được thí nghiệm đó và qua việc dùng các phương pháp số khác.
S,K. Godunov và V.S. Rjabenkij

Tài liệu

[1] Nguyen Van Dao, Nguyen Dung, DANG DINH ANG: NONLINEAR ANALYSIS AND MECHANICS (On the occasion of his eightieth birthday), Vietnam J ournal of Mechanics, VAST, Vol. 28, No . 1 (2006), pp. 1-9.

[2] I.I. Blekman, A.D. Mưskix, Ia.G. Panovko, Toán học ứng dụng, Đối tượng, Logic, Đặc điểm các phương pháp (Trần Tất Thắng dịch), NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1985.

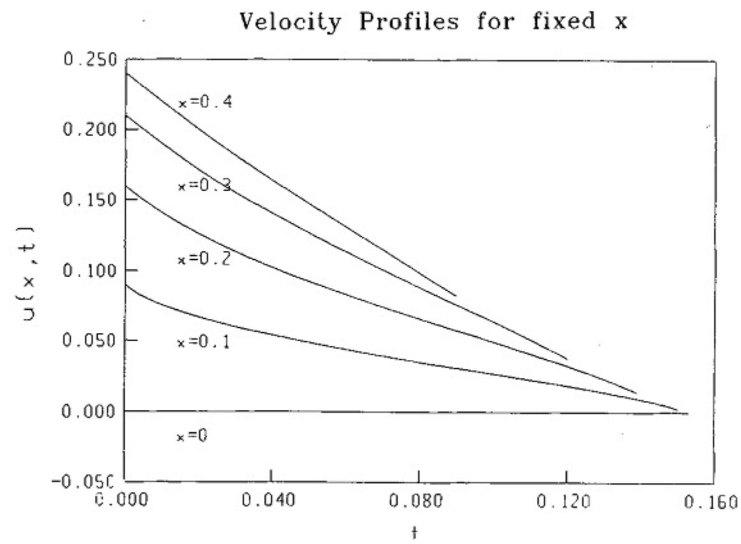


Fig. 2e. Example 1 : Velocity in flow zone for $x = 0$ to $x = 0.4$ in steps of 0.1.

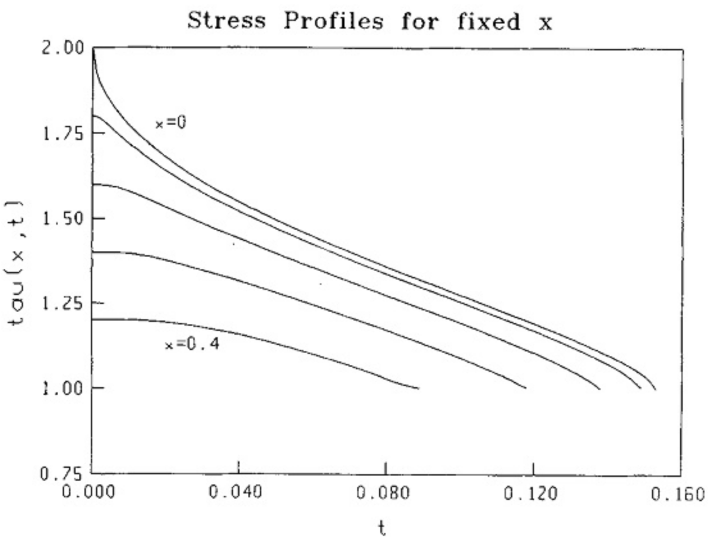


Fig. 2f. Example 1 : Stress in flow zone for $x = 0$ to $x = 0.4$ in steps of 0.1.